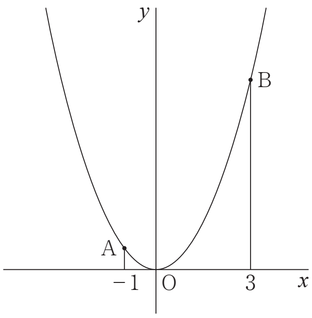
# 第 16 講　関数と図形②

## Step 1

1　関数 $y = x^2$ のグラフ上に2点A，Bがあり，点Aの $x$ 座標は－1，点Bの $x$ 座標は3である。このとき，次の各問いに答えなさい。




問1　点Aの $y$ 座標を求めなさい。

問2　この関数において $x$ の変域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき，$y$ の変域を求めなさい。

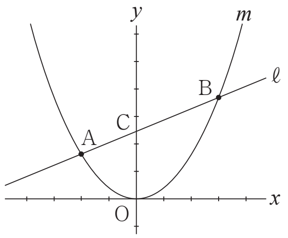
問3　原点をOとするとき，△OABの面積を求めなさい。

問4　原点Oから直線ABに下ろした垂線と直線ABとの交点をPとするとき，線分OPの長さを求めなさい。

【沖縄県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

2　右図において，$m$ は $y = ax^2$（$a$ は正の定数）のグラフを表す。A，B は $m$ 上の点であって，A，B の $x$ 座標はそれぞれ－2，3 である。$\ell$ は，2 点 A，B を通る直線である。C は，$\ell$ と $y$ 軸との交点である。




①　C の $y$ 座標を $a$ を用いて表しなさい。

②　O と A，O と B とをそれぞれ結んでできる△AOB の面積が $6\,\mathrm{cm}^2$ であるときの直線 $\ell$ の式を求めなさい。求め方も書くこと。ただし，座標軸の 1 目もりの長さは 1 cm であるとする。

【大阪府】

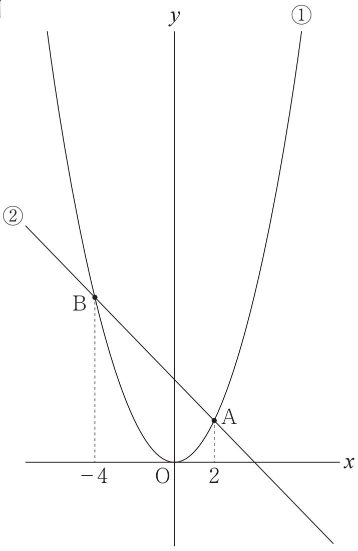
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

## Step 2

**3** 図のように，関数 $y = ax^2$……①と $y = -x + b$……②のグラフが，2点A，Bで交わっている。2点A，Bの $x$ 座標はそれぞれ，2，$-4$ である。

次の問1，問2に答えなさい。

図




問1　次の ア ～ ク にあてはまる数を答えなさい。

点Aは，①のグラフ上にあるので，

座標は(2, ア $a$)と表すことができる。

同様に，点Bも①のグラフ上にあるので，

座標は($-4$, イ $a$)と表すことができる。

さらに，点Aは②のグラフ上の点であるから，

ア $a$ = ウ + $b$……③が成り立つ。

同様に，点Bも②のグラフ上の点であるから，

イ $a$ = エ + $b$……④が成り立つ。

③と④から，$a$，$b$ の値を求めると，$a$ = オ，$b$ = カ となる。

したがって，関数①の $x$ の変域が $-4 \leqq x \leqq 2$ のときの $y$ の変域を求めると，

キ $\leqq y \leqq$ ク となる。

問2　△OABと△OAPの面積が等しくなるような点Pを関数①のグラフ上にとる。ただし，点Pは点Bとは異なる点である。

次の1，2に答えなさい。

1．点Pの位置は，どのように決めればよいか，「平行」ということばを用いて説明しなさい。

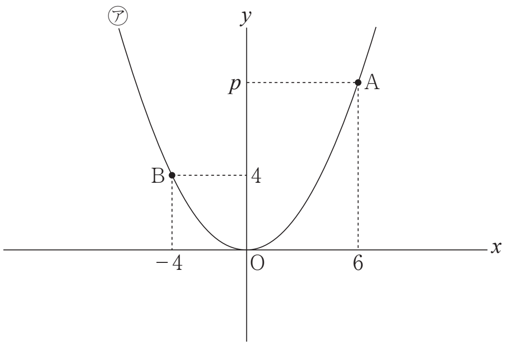
2．直線ABと $y$ 軸の交点をQとし，直線BPと $y$ 軸との交点をRとする。△OAQと△BQRの面積の比を，最も簡単な整数の比で答えなさい。

【島根県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

4　右の図のように，関数 $y = ax^2$……㋐のグラフ上に2点A，Bがあり，点Aの座標が$(6,\ p)$，点Bの座標が$(-4,\ 4)$である。

このとき，あとの各問いに答えなさい。




(1)　$a$，$p$ の値を求めなさい。

(2)　関数㋐について，$x$ の値が$-4$から0まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(3)　2点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

(4)　原点をOとし，直線ABが$x$軸と交わる点をCとするとき，次の各問いに答えなさい。

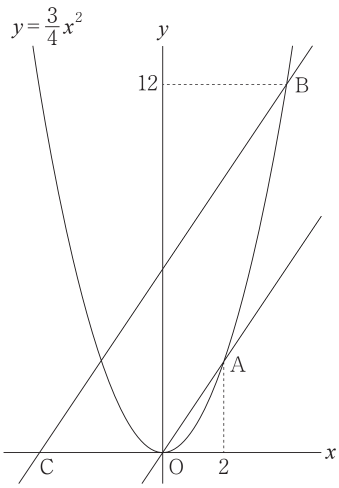
①　△OBCを，$x$軸を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。
ただし，円周率は$\pi$とし，座標の1目もりは1cmとする。

②　原点Oを通り，直線ABに平行な直線が，関数㋐のグラフと交わる点をDとする。直線OD上の$x < 0$となる部分に点Eをとり，四角形ABEOをつくる。四角形ABEOの面積と△ACDの面積が等しくなるとき，点Eの座標を求めなさい。
ただし，点Dは原点Oと異なる点とする。

【三重県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

## Step　3




5　右の図のように，関数 $y=\frac{3}{4}x^2$ のグラフ上に2点A，Bがある。Aの $x$ 座標は2で，Bの $y$ 座標は12であり，Bの $x$ 座標は正である。また，点Oは原点であり，点Cは，Bを通り，直線OAに平行な直線と $x$ 軸との交点である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

(1)　点Aの $y$ 座標を求めなさい。

(2)　点Bの $x$ 座標を求めなさい。

(3)　直線BCの式を求めなさい。

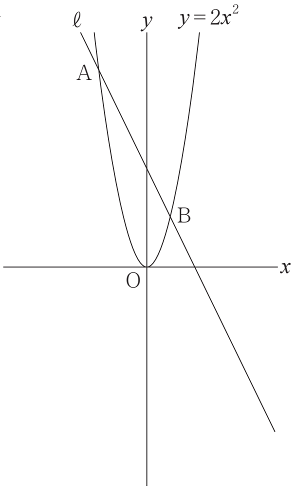
(4)　線分BC上に2点B，Cとは異なる点Pをとる。△OPCの面積が△OABの面積の $\frac{1}{2}$ となるときのPの座標を求めなさい。

【熊本県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

6　右の図1のように，関数 $y = 2x^2$ のグラフと直線 $\ell$ が2点A，Bで交わっている。2点A，Bの $x$ 座標が，それぞれ－2，1であるとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

図1



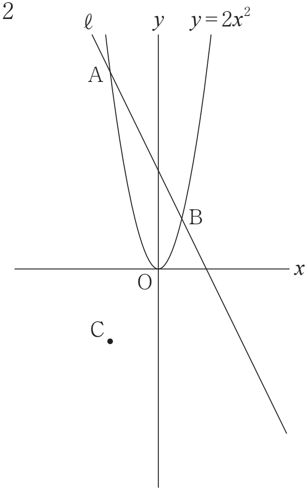

(1)　直線 $\ell$ の式を求めなさい。

(2)　右の図2のように，図1において点C（－2，－3）をとる。$y$ 軸を対称の軸として，点Cを対称移動した点をDとし，線分CDを1辺とする正方形CDEFを，点E，Fの $y$ 座標が負となるようにかく。

この正方形CDEFの周上に点Pをとり，点Pと2点A，Bを結んで，△ABPをつくる。

△ABPの面積が，原点Oと2点A，Bを結んでできる△ABOの面積の3倍になるような点Pは2つある。この2つの点の座標を，それぞれ求めなさい。

図2




【千葉県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第16講　関数と図形②

## Step 1

1　問1.（$y=$）1　問2. $0 \leqq y \leqq 9$　問3. 6　問4.（OP $=$）$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

≪解説≫

問1. $y=x^2$ に $x=-1$ を代入して，点Aの $y$ 座標は，$y=(-1)^2=1$

問2. $x=0$ のとき，$y=0$ で最小値をとり，$x=3$ のとき，$y=3^2=9$ で最大値をとる。よって，$0 \leqq y \leqq 9$

問3. 問1，問2より，A $(-1,\ 1)$，B $(3,\ 9)$　直線ABの式は，傾きが，$\dfrac{9-1}{3-(-1)}=2$ なので，$y=2x+b$ とおき，$(-1,\ 1)$を代入して，$1=2\times(-1)+b$ より，$b=3$ となり，$y=2x+3$　よって，直線ABの切片をCとすると，$\triangle$OAB $=\triangle$OAC $+\triangle$OBC $=\dfrac{1}{2}\times3\times1+\dfrac{1}{2}\times3\times3=6$

問4. AB $=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(9-1)^2}=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$　よって，$\triangle$OABの面積について，$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times$ OP $=6$ が成り立ち，OP $=\dfrac{6}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

2　① $6a$　② $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{12}{5}$

≪解説≫

① $y=ax^2$ に，$x=-2$，$x=3$ をそれぞれ代入すると，$y=a\times(-2)^2=4a$，$y=a\times3^2=9a$ より，A $(-2,\ 4a)$，B $(3,\ 9a)$となる。これより，直線ABの傾きは，$\dfrac{9a-4a}{3-(-2)}=a$ だから，Cの $y$ 座標を $c$ とすると，直線 $\ell$ の式は，$y=ax+c$ と表せる。この式に，点Aの座標の値を代入して，$4a=a\times(-2)+c$ より，$c=6a$

② $\triangle$AOB $=\triangle$AOC $+\triangle$BOC $=\dfrac{1}{2}\times6a\times2+\dfrac{1}{2}\times6a\times3=15a$　よって，$15a=6$ が成り立つので，$a=\dfrac{2}{5}$　①より，ABの傾きは $a=\dfrac{2}{5}$，切片は $6a=\dfrac{12}{5}$ だから，直線 $\ell$ の式は，$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{12}{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

## Step　2

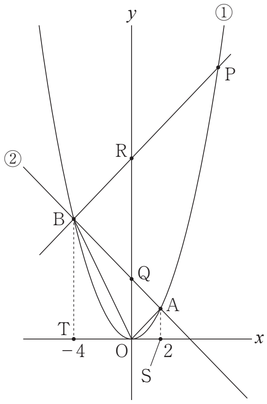
**3** 問1. ア. 4　イ. 16　ウ. $-2$　エ. 4　オ. $\frac{1}{2}$　カ. 4　キ. 0　ク. 8

問2. 1. （説明）（例）点Bを通り，OAに平行な直線をひく。この直線と①のグラフとの交点のうち，Bでない方をPとする。2. （△OAQ：△BQR＝）1：4

≪解説≫

問1. 点Aの$y$座標は，$a \times 2^2 = 4a$　また，点Bの$y$座標は，$a \times (-4)^2 = 16a$　2点A，Bの座標を②のグラフにそれぞれ代入すると，$\begin{cases} 4a = -2 + b \cdots\cdots ③ \\ 16a = 4 + b \cdots\cdots ④ \end{cases}$　これを解くと，$a = \frac{1}{2}$，$b = 4$　関数①の式が$y = \frac{1}{2}x^2$だから，$x$の変域が$-4 \leqq x \leqq 2$のとき，$y$の値は，$x = 0$で最小値$y = 0$，$x = -4$で最大値，$y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$　よって，$y$の変域は，$0 \leqq y \leqq 8$

問2. 1. △OABと△OAPは，ともにOAを底辺とすると，OA∥BPのとき，高さが等しくなり，面積も等しくなる。2. 右図のようにS，Tをとると，AQ：BQ＝SO：TO＝2：4＝1：2　OA∥BRより，△OAQ∽△RBQで，相似比は，AQ：BQ＝1：2なので，△OAQ：△BQR＝$1^2 : 2^2$＝1：4




**4** (1) ($a$ =) $\frac{1}{4}$　($p$ =) 9　(2) $-1$　(3) $y = \frac{1}{2}x + 6$

(4) ① $64\pi$ (cm$^3$)　② E $(-8,\ -4)$

≪解説≫

(1) B $(-4,\ 4)$は，$y = ax^2$上の点だから，$x = -4$，$y = 4$を代入して，$4 = a \times (-4)^2$より，$a = \frac{1}{4}$　よって，A $(6,\ p)$は，$y = \frac{1}{4}x^2$上の点だから，$p = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9$

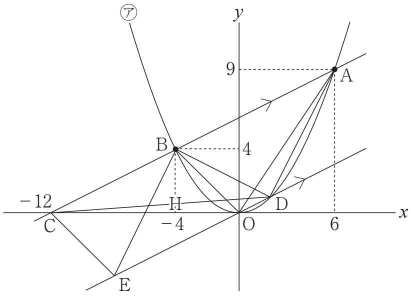
(2) $y = \frac{1}{4}x^2$について，$x = -4$のとき$y = 4$，$x = 0$のとき$y = 0$だから，求める変化の割合は，$\frac{0-4}{0-(-4)} = -1$

(3) A $(6,\ 9)$，B $(-4,\ 4)$より，直線ABの傾きは，$\frac{9-4}{6-(-4)} = \frac{1}{2}$　よって，直線AB

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

の式は，$y = \frac{1}{2}x + b$ と表せる。B $(-4,\ 4)$ を通ることから，$4 = \frac{1}{2} \times (-4) + b$ より，$b = 6$　よって，直線 AB の式は，$y = \frac{1}{2}x + 6$

(4) ① $y = \frac{1}{2}x + 6$ に，$y = 0$ を代入して，$0 = \frac{1}{2}x + 6$ より，$x = -12$ だから，C $(-12,\ 0)$　また，点 B から $x$ 軸に垂線を引き，$x$ 軸との交点を H とすると，H $(-4,\ 0)$ となる。△OBC を，$x$ 軸を軸として 1 回転させてできる立体は，半径 BH の円が底面で，高さが CH と OH である 2 つの円すいを合わせたものになる。BH $= 4$，CH $= -4-(-12) = 8$，OH $= 4$ より，求める体積は，$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 8 + \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 4 = 64\pi\ (\mathrm{cm}^3)$　② 上図で，AC ∥ DE より，△ACD ＝△ACO ＝△ABO ＋△CBO　また，四角形 ABEO ＝△ABO ＋△EBO だから，四角形 ABEO ＝△ACD のとき，△CBO ＝△EBO となる。このとき，CE ∥ BO だから，四角形 BCEO は平行四辺形。これより，CE ＝ BO，CE ∥ BO となり，O は B を $x$ 軸方向に $+4$，$y$ 軸方向に $-4$ 移動した点だから，E も C を同様に移動した点となる。よって，C $(-12,\ 0)$ より，E $(-8,\ -4)$




## Step　3

5　(1) 3　(2) 4　(3) $y = \frac{3}{2}x + 6$　(4) $\left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$

≪解説≫

(1) $y = \frac{3}{4}x^2$ に $x = 2$ を代入して，$y = \frac{3}{4} \times 2^2 = 3$

(2) $y = \frac{3}{4}x^2$ に $y = 12$ を代入して，$12 = \frac{3}{4}x^2$ より，$3x^2 = 48$ となり，$x^2 = 16$　$x > 0$ より，$x = 4$

(3) 点 A $(2,\ 3)$ より，直線 OA の傾きは $\frac{3}{2}$。直線 BC の式を $y = \frac{3}{2}x + b$ とおき，点 B の座標を代入すると，$12 = \frac{3}{2} \times 4 + b$ より，$b = 6$　よって，$y = \frac{3}{2}x + 6$

(4) OA ∥ BC より，△OAB ＝△OCA なので，△OPC $= \frac{1}{2}$ △OAB $= \frac{1}{2}$ △OCA　よって，点 P の $y$ 座標は，点 A の $y$ 座標 3 の $\frac{1}{2}$ となればよく，$y = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$　$y = \frac{3}{2}x + 6$ に $y = \frac{3}{2}$ を代入して，$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}x + 6$ より，$x = -3$ となるから，P $\left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$

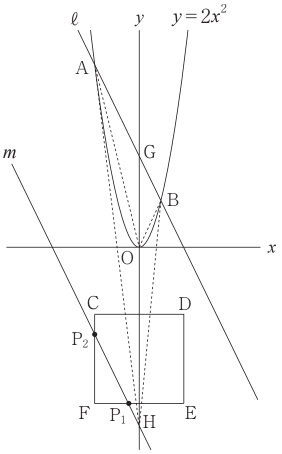
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

6　(1) $y=-2x+4$　(2) $\left(-\frac{1}{2},\ -7\right)$，$(-2,\ -4)$

≪解説≫

(1) $y=2x^2$ に $x=-2$ を代入して，$y=2\times(-2)^2=8$ より，A$(-2,\ 8)$　$y=2x^2$ に $x=1$ を代入して，$y=2\times1^2=2$ より，B$(1,\ 2)$　これより，直線 $\ell$ の傾きは，$\frac{2-8}{1-(-2)}=-2$ なので，求める式を $y=-2x+b$ とおいて点 B の座標を代入すると，$2=-2\times1+b$ となり，$b=4$　よって，$y=-2x+4$

(2) 正方形 CDEF は右図のようになり，D$(2,\ -3)$，CD $=2-(-2)=4$ より，E$(2,\ -7)$，F$(-2,\ -7)$　さらに，G$(0,\ 4)$ とおくと，GO $=4$ で，△ABO $=$ △GAO $+$ △GBO $=\frac{1}{2}\times4\times2+\frac{1}{2}\times4\times1=6$　ここで，$y$ 軸上に，GH $=4\times3=12$ となる点 H$(0,\ -8)$ をとると，△ABH $=$ △GAH $+$ △GBH $=\frac{1}{2}\times12\times2+\frac{1}{2}\times12\times1=18$ となり，△ABH の面積は△ABO の面積の 3 倍。このとき，点 H を通り $\ell$ に平行な直線を $m$ とすると，その式は $y=-2x-8$ で，直線 $m$ 上に点 P をとると，△ABP $=$ △ABH なので，△ABP の面積も△ABO の面積の 3 倍になる。よって，求める点 P は，正方形 CDEF の周と直線 $m$ の交点なので，上図のように，FE，CF との交点をそれぞれ $P_1$，$P_2$ とする。直線 $m$ の式に $y=-7$ を代入して，$-7=-2x-8$ より，$x=-\frac{1}{2}$ となり，$P_1\left(-\frac{1}{2},\ -7\right)$　また，直線 $m$ の式に $x=-2$ を代入して，$y=-2\times(-2)-8=-4$ より，$P_2(-2,\ -4)$




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。